РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ НА КУБОК имени Ю.А. ГАГАРИНА

2017-2018 учебный год

МАТЕМАТИКА

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП

7 класс

Максимальное количество баллов за задания:

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Сумма
Количество баллов	5	5	7	5	7	5	5	5	7	5	7	7	70

Все оценки должны быть целыми числами, дробные оценки не допускаются!

ОТВЕТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ

1. **Ответ:** 7317192329.

   Решение: Рассмотрим первые 10 простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 и составим из них требуемое число: 2357111317192329. При вычёркивании ровно 6 цифр получится десятизначное число, для которого наибольшее значение будет при наибольшем возможном значении старшего разряда (первой цифры), и далее по порядку. Т.к. из первых 7 цифр наибольшей является 7, то вычеркнем первые три цифры: 7111317192329. Из последующих четырёх цифр наибольшей является 3, потому вычеркиваем три единички: 7317192329.

   Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

2. **Ответ:** 70 очков.

   Решение: Третий стрелок выбил 70 очков ($\frac{60+80}{2} = 70$), четвёртый выбил 70 очков ($\frac{60+80+70}{3} = 70$), и так далее. Последний выбил также 70 очков.

   Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

3. **Решение:** Если сосчитать сумму всех чисел в таблице построчно, то получим число $100 \cdot \text{М}$, а если сосчитать сумму всех чисел таблицы по столбцам, то $100 \cdot \text{К}$. Так как сумма всех чисел в таблице не зависит от того, как её считать, то $100 \cdot \text{М} = 100 \cdot \text{К}$, откуда следует равенство $\text{М} = \text{К}$. Могут быть и другие способы доказательства.

   Критерии оценки. Верное доказательство – 7 баллов. Ошибки и недочёты в доказательстве – 1-3 балла. Грубые ошибки при доказательстве (неверные и необоснованные утверждения) – 0 баллов

4. **Ответ:** 0.

   Решение: Замечаем, что последняя цифра при умножении этого ряда чисел образует последовательность 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0, 0, причём сумма этих чисел кратна 10. То есть, каждые 10 произведений (начиная с первого) в сумме заканчиваются на 0. Всего в сумме 999 слагаемых, но последнее заканчивается на 0. Имеются и другие методы решения - выделения остатков от деления на 10 и использование свойств суммы и произведения.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

5. **Ответ:** нет, нельзя.

Решение: Методом инвариантов. Пусть при любой комбинации монет решка на каждой монете соответствует числу (+1), а орёл на монете (-1). Тогда при переворачивании 20-ти монет ровно 20 чисел меняют свой знак на обратный, а одно число его не меняет. Следовательно, число, равное произведению (+1) и (-1) соответствующих решкам и орлам не меняет знак при переворачивании 20 монет (это и есть инвариант). Рассматривая теперь первоначальное положение всех монет решками вверх, получим значение инварианта для него (+1) и при любой последовательности переворачиваний ровно по 20 монет это число неизменно и равно (+1). Но для случая, когда все монеты легли орлом вверх, соответствующий инвариант равен (-1), что не могло произойти в результате перекладываний. Могут быть и другие методы обоснования.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Ошибки в обосновании – 2-4 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

6. **Ответ:** 36.

Решение: Заметим, что по признаку деления на число 9, сумма цифр числа, состоящего из последовательности 2017 (сумма цифр 2+0+1+7=10) должна делиться на 9. Такая сумма будет кратна 9 для последовательности, состоящей из числа 2017, повторяющегося кратное 9 число раз. То есть, ответ – можно. И наименьшая длина будет $9\times4=36$ символов.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

7. **Ответ:** 19 рыжиков и 11 груздей.

Решение: Возьмём 12 грибов – там есть хотя бы один рыжик. Заметим, что груздей не может быть больше 11, так как если их больше, то из них можно организовать 12 грибов, в которых не будет рыжика, что противоречит условию. Аналогично рассмотрим 20 грибов – там есть хотя бы один груздь. А рыжиков всего в корзине не более 19. Следовательно, так как грибов в корзине 30, а кроме рыжиков и груздей других нет, то среди них те самые 11 максимально возможных груздей и 19 рыжиков.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

8. **Ответ:** среда.

Решение: Легко убедиться, что между днём, когда "вчера" было "завтра", и днём, когда "послезавтра" станет "вчера", проходит 4 дня. Значит, интересующие нас дни не могут одинаково отстоять от одного и того же воскресенья, а могут только от двух разных. Это возможно, если первый из дней – понедельник, второй – суббота, а сегодня – среда.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

9. **Ответ:** три яблока разделить на 4 части каждое, а 4 яблока разделить на 3 части каждое.

Решение: Понятно, что при делении каждому мальчику должно достаться равное количество яблок (как по количеству кусков, так и по массе). То есть, каждый должен получить по 7/12 от общего количества кусков. Легко убедиться, что $\frac{7}{12}=\frac{3+4}{3\cdot4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Таким образом, каждому из 12 мальчиков достанется по $\frac{1}{3}$ одного яблока и по $\frac{1}{4}$ другого яблока. А $12\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=4+3$ яблока, из которых 4 яблока надо разделить на три части, а другие 3 яблока – на четыре части. Могут быть и другие обоснования. Из-за неопределённостей в условии задачи могут быть предложены методы деления на неравные части.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Обоснование, опирающееся на неравные количества яблока, полученные мальчиками – 2-3 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

10. Ответ: 180000.

Решение: С помощью комбинаторики. Рассмотрим 6 разрядов числа, для каждого из которых установим правило заполнения их цифрами. Первый разряд не может содержать 0, со второго по четвёртый разряд могут содержать все цифры, разряд единиц может содержать 0 или 5 по признаку делимости целого числа на 5. По правилу произведения количество вариантов заполнения каждого разряда нужно перемножить для определения количества всех возможных вариантов шестизначных чисел, кратных 5. Действительно, $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 180000$.

Критерии оценки. Верный ответ – 5 баллов. Неверный ответ – 0 баллов.

11. Ответ: шестиклассников больше.

Решение: Рассмотрим количество рукопожатий – каждое из них сделано одним из шестиклассников и одним из семиклассников. Пусть А и Б – число шестиклассников и семиклассников соответственно. Тогда, по условию, шестиклассники участвовали в $7 \cdot \text{Б}$ рукопожатиях, а семиклассники – в $6 \cdot \text{А}$. Так как это одно и то же количество рукопожатий, но посчитано разными способами, то $6 \cdot \text{А} = 7 \cdot \text{Б}$, откуда $\text{А} = \frac{7}{6} \cdot \text{Б}$, а значит, $\text{А} > \text{Б}$. Могут быть и другие обоснования.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Обоснования, опирающееся на частные случаи (например, приведены конкретные количества школьников), без обобщения – 2-3 балла. Неверный ответ – 0 баллов.

12. Ответ: при правильной игре выигрывает второй.

Решение: Методом игровых стратегий. Используем симметричную стратегию. У второго игрока есть стратегия – после хода первого закрасить клеточку, симметричную той, которую закрасил первый относительно центра доски. Можно показать, что при такой стратегии для второго невозможно получить уголок из закрашенных клеток раньше первого. Отсюда – у второго есть преимущество. Могут быть и другие обоснования.

Критерии оценки. Верный обоснованный ответ – 7 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Неверный ответ – 0 баллов.